ラングレーの問題

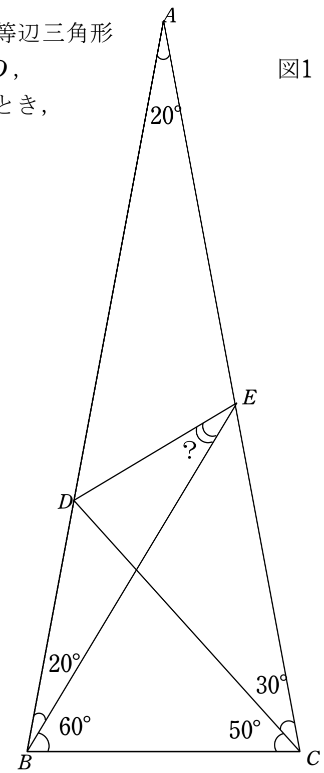
この問題は，1922 年 10 月に，イギリスの数学者**エドワード・マン・ラングレー**（1851～1933）によって "A Problem" のタイトルで発表され，翌年5月に複数の解法が紹介された有名な問題である。

問題

図 1 のような頂角が 20°，$AB=AC$ である二等辺三角形 ABC で，辺 AB 上に $\angle BCD=50°$ となる点 D，辺 AC 上に $\angle CBE=60°$ となる点 E をとったとき，$\angle BED$ の大きさを求めよ。

まずは，ノーヒントで，この角度が何度になるかを考えてみよう。

図1



徹底的に考えましたか？
次に，代表的な解を紹介します。
これは一つの例ですので，
他にも解法を考えてください。

解答 1

図 2 のように，辺 AC 上に $\angle CBF=20°$ となる点 F をとると，$\triangle BCF \backsim \triangle ABC$ であり，$BC=BF$ ……①　また，$\angle BDC=\angle BCD=50°$ だから，$BC=BD$ ……②

①，②より，$BF=BD$

さらに，$\angle DBF=60°$ より，$\triangle BDF$ は正三角形である。　よって，$FD=FB$ ……③

次に，$\angle FBE=\angle FEB=40°$ より，$FB=FE$ ……④　③，④より，$FD=FE$

つまり，$\triangle FDE$ は二等辺三角形で，頂角は $\angle DFE=180°-80°-60°=40°$

よって，$\angle DEF=\frac{1}{2}(180°-40°)=70°$　したがって，$\angle BED=70°-40°=$ <u>30°　答</u>

山脇の超数学講座 No. 25

図 2

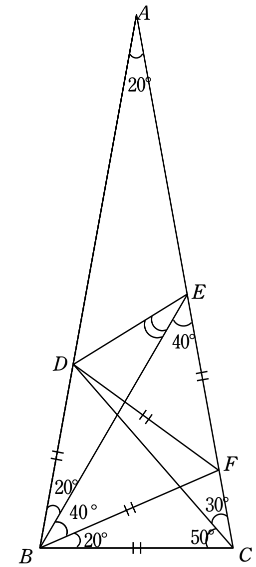
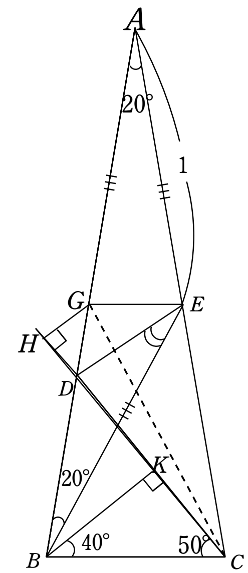


図 3



解答 2　次に三角関数を用いて，この問題の別解を考え，探究してみよう。

まず，三角関数について，次の関係を示す。

$$\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{2}(\cos 20° + \cos 60°)\cos 80° = \frac{1}{2}\cos 80° \cos 20° + \frac{1}{4}\cos 80°$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 100° + \cos 60°) + \frac{1}{4}\cos 80° = -\frac{1}{4}\cos 80° + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cos 80° = \frac{1}{8} \quad \cdots\cdots⑤$$

図3　で点 E より辺 CB に平行に直線を引き，辺 AB との交点を G とする。

点G，Bより直線 CD に垂線を引き，その足をそれぞれ H，K とする。

$AE=1$ とすると，$AE=AG=EB=GC=1$ ……⑥

まず　$AB=2\cos 20°$，次に，　$BC=2AB\cos 80°=4\cos 20° \cos 80°$

さらに，$BK=BC\cos 40°=4\cos 20° \cos 40° \cos 80°=\frac{1}{2}$ （∵⑤）……⑦

$\angle GCH=60°-50°=10°$，ゆえに，$GH=GC\sin 10°=\sin 10°$ （∵⑥）……⑧

$\triangle GDH \backsim \triangle BDK$ より，

$GD:BD=GH:BK=\sin 10° : \frac{1}{2} = 2\sin 10° : 1$ （∵⑦，⑧）……⑨

一方，$EG=2\cos 80°=2\sin 10°$ だから，$EG:EB=2\sin 10° : 1$ ……⑩

$\triangle EGB$ で，⑨，⑩より，$EG:EB=GD:BD$

よって，角の二等分線の定理の逆より，$\angle GED=\angle BED$

$GE /\!/ BC$ より，$\angle GEB=\angle CBE=60°$ だから，<u>$\angle BED=30°$　答</u>